בוחן אמצע, סמסטר חורף תשפ"ג - אלגברה 1/מ, 104016
28.12.22

ת"ז :

פקולטה :

- משך הבוחן : 2 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-2** יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.
בשאלות 3-7 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון.
- **אין צורך לרשום נימוקים בשאלות 3-7.** נימוקים בשאלות אלה לא יבדקו.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 3-7

	שאלה מס' 3	שאלה מס' 4	שאלה מס' 5	שאלה מס' 6	שאלה מס' 7
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (29 נקודות). בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ומנומק

נתונה מערכת המשוואות $A\bar{x}=b$ עם ארבעה נעלמים ממשיים x,y,z,w , כאשר $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ פרמטרים:

$$\begin{cases} x+z+w=1 \\ x+(\alpha^2-1)y+\alpha^2 z+\alpha w=\alpha \\ 2x+(\alpha^2-1)y+(\alpha^2+\alpha+2)z+(2\alpha+2)w=\alpha^2+2\alpha+1+\beta \\ 2x+2z+(3-\alpha)w=\alpha+1+\beta \end{cases}$$

א. (15 נק')

(i) לאילו ערכים של α,β יש למערכת פתרון יחיד?

(ii) לאילו ערכים של α,β יש למערכת אינסוף פתרונות?

(iii) לאילו ערכים של α,β אין למערכת פתרון?

ב. (7 נק') במקרים בהם יש אינסוף פתרונות, מצאו את מספר דרגות החופש, ורשמו את הפתרון הכללי.

ג. (5 נק') לכל α,β עבורם למערכת האי הומוגנית $A\bar{x}=b$ יש אינסוף פתרונות, מצאו קבוצה פורשת למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה, כלומר של $A\bar{x}=0$.

2 נק' יינתנו על דירוג נכון.

בסוף הפתרון המפורט, אנא רכזו את תשובותיכם הסופיות בטבלה שבסוף השאלה.

א. (*i*) פתרון יחיד:	(*ii*) אינסוף פתרונות:	(*iii*) אין פתרון:
ב. דרגות חופש במקרים של אינסוף פתרונות ופתרון כללי:	ג. קבוצה פורשת:	

<u>שאלה מס' 2</u> : (36 נקודות) בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ומנומק

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית מספרית את **4** הטענות הבאות (במקרה של מתן דוגמא נגדית מספרית, יש להסביר מדוע זו דוגמא נגדית):

א. (9 נק') יהי F שדה כלשהו, ותהי $A \in F^{2\times 2}$ סימטרית ובעלת סכום אברי אלכסון השווה 0.
אם $A^2 = 0$ אז $A = 0$.

ב. (9 נק') יהי $V \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ תת מרחב וקטורי כך שלכל $A \in V$ מתקיים $A^2 = 0$.
אזי, לכל $A, B \in V$ מתקיים: $AB = -BA$.

ג. (9 נק') תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. אם למערכת האי הומוגנית $A\bar{x} = b$ יש אינסוף פתרונות, אז גם למערכת $A^{2022}\bar{x} = b$ יש אינסוף פתרונות.

ד. (9 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $u, v, w \in V$. אם $\{u, v\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית וגם $w \notin span\{u, v\}$ אז גם $\{u+w, v+w\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 3-7 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 3</u> : (7 נק')

אם $z_0 \in \mathbb{C}$ לא ממשי, הוא פתרון של המשוואה $z^5+4z^4+3z^2+z+i=0$. אזי:

א. $\overline{z}_0$ הוא גם פתרון של המשוואה.

ב. $\overline{z}_0$ הוא לא פתרון של המשוואה.

ג. לא ניתן לקבוע אם $\overline{z}_0$ הוא פתרון של המשוואה.

ד. $-\overline{z}_0$ הוא גם פתרון.

ה. למשוואה יש בהכרח פתרון ממשי z_1 .

<u>שאלה מס' 4</u> : (7 נק')

נסמן ב- k את מספר המטריצות **הסקלריות** השונות ב- $\mathbb{C}^{2\times 2}$ המקיימות את המשוואה $(-1-i)A^9 = iI$, עם איברים **ברביע השלישי** (כאן $i=\sqrt{-1}$). אזי:

א. $k=9$; ב. $k=4$; ג. $k=2$; ד. $k=3$; ה. $k=6$.

<u>שאלה מס' 5</u> : (7 נק')

יהיו: $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ שתיהן שונות מ- 0. סמנו את הטענה היחידה שנכונה:

א. אם A ו- B שקולות שורה אז A ו- B תלויות לינארית.

ב. אם A ו- B תלויות לינארית אז A ו- B שקולות שורה.

ג. אם B אלכסונית אז $AB = BA$.

ד. אם B אלכסונית אז B מדורגת.

ה. אם B אלכסונית ו- A מדורגת, אז BA מדורגת.

<u>שאלה מס' 6</u> : (7 נק')

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times n}$.

א. אם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ קיים פתרון אז גם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ קיים פתרון.

ב. אם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד אז גם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ קיים פתרון יחיד.

ג. אם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ אין פתרון אז גם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ אין פתרון.

ד. אם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ וגם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ קיים פתרון, אז יש להן פתרון יחיד.

ה. אם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ וגם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ קיים פתרון, אז גם למערכת $A\overline{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$ קיים פתרון.

<u>שאלה מס' 7</u> : (7 נק')

נגדיר שני תת מרחבים של $\mathbb{R}_3[x]$:

$$U=span\left\{1+2x+4x^2+3x^3\ ,\ 1+2x^2-5x^3\ ,\ 1+x+3x^2-x^3\right\}$$
$$W=\left\{a+ax-2ax^2+3ax^3\ \middle|\ a\in\mathbb{R}\right\}$$

אזי :

א. $2+x+10x^2-10x^3\notin U+W$.

ב. $U+W=\mathbb{R}_3[x]$ והסכום אינו סכום ישר.

ג. $U\oplus W=\mathbb{R}_3[x]$ והסכום הוא סכום ישר.

ד. $U+W\neq\mathbb{R}_3[x]$ והסכום אינו סכום ישר.

ה. $U\oplus W\neq\mathbb{R}_3[x]$ והסכום הוא סכום ישר.

דף ריק למקרה הצורך